

Naš rezultat (30) dakle znači da je za harmonički oscilator prirodne frekvencije ν , kvantna predikcija za prosječnu energiju pobuđenja

$$\langle E \rangle - E_0 = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \equiv h\nu\rho_T(\nu), \quad (31)$$

i to je ono što zamjenjuje klasičnu predikciju $k_B T$ u općenitom slučaju. Međutim, kvantni se rezultat (31) reducira na tu klasičnu predikciju (13) za $h\nu \ll k_B T$, dakle kada je elementarni kvant energije mnogo manji od tipične energije termalnog gibanja. Kada u Rayleigh-Jeansovom zakonu (11) umjesto $k_B T$ upotrijebimo (31), dobivamo Planckov zakon zračenja

$$u_T(\nu) = M(\nu)(\langle E \rangle - E_0) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (32)$$

Ovaj zakon se slaže s eksperimentalnim gustoćama zračenja crnog tijela za sve frekvencije i temperature za Planckovu konstantu iznosa

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ erg} \cdot \text{s} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (33)$$

To je moderna vrijednost, dobivena nakon raznovrsnih vrlo točnih mjerena. Zamijetite da je samo 1% veća od vrijednosti koju je objavio Planck već 1900. Tako je – prilagođujući Planckovu teorijsku krivulju eksperimentalnim spektralnim gustoćama energije zračenja crnog tijela – po prvi put izmjerena ova fundamentalna konstanta prirode.

Zadaci 2

- 2.1. Spektralne gustoće zračenja koje su dane kao funkcije valne duljine izrazite kao funkcije frekvencije i obratno. Time ćete dokazati formulu (6).
- 2.2. Koje spektralne gustoće zračenja zadovoljavaju oblik (9) koji zahtijeva Wienov zakon iz 1893. godine?
- 2.3. Provjerite da Planckov zakon zračenja u odgovarajućim graničnim slučajevima daje Rayleigh-Jeansov zakon, odnosno Wienov zakon iz 1896.
- 2.4. Pokažite da Planckov zakon zračenja (32) preko formula (7) daje Stefanov zakon $P_T = \sigma T^4$ te da predviđa da je Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15 h^3 c^2$. Izračunajte njenu (empirički provjerenu) vrijednost $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$.
- 2.5. Dokažite formulu (12) za broj modova elektromagnetskog polja. (Ne zaboravite da mu doprinose dvije polarizacije.)